ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ И КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.В.Костерин

НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева
Казанского государственного университета
420008, Казань, ул. Университетская, 17
Alexander.Kosterin@ksu.ru

Нелинейной задаче фильтрации в физической области соответствует линейная задача в области годографа скорости [1]. Именно с этим фактом традиционно связаны применение и развитие метода годографа в теории фильтрации [2]. Методы решения линейных задач хорошо разработаны. В том числе – точные и приближенные аналитические методы, что было особенно важно в докомпьютерную эру.

Ниже приводятся два примера нетрадиционного использования метода годографа, когда он служит инструментом выявления некоторых качественных свойств фильтрационных задач.

В первом случае речь идет о теории нелинейной анизотропной фильтрации, основанной на принципе Циглера [3, 4]. При этом закон течения выражается через диссипативную функцию. Выводится дифференциальное уравнение для напора в области годографа скорости. Неожиданно оказывается, что условием эллиптичности этого уравнения является выпуклость диссипативной функции, а симметрия его матрицы эквивалентна нелинейному обобщению термодинамических условий Онсагера [5].

Во втором примере рассматривается вопрос о переходе из области годографа в область течения. Суть вопроса в том, что уравнение для напора в скоростях получается именно из условия взаимно-однозначного соответствия точек этих областей. Следовательно, располагая приближенным решением задачи в годографе, нельзя по обычным формулам [2] однозначно (точно) восстановить картину фильтрационного течения. Оказалось, что существует определенная связь между мерой неоднозначности такого восстановления и невязкой приближенного решения [6].

Нелинейная анизотропная фильтрация: взаимосвязь эллиптичности уравнения для напора и выпуклости диссипативной функции. Объемная плотность диссипации D механической энергии фильтрационным потоком выражается в виде

$$D = -q \cdot \nabla h, \tag{1}$$

где q – скорость фильтрации, h – напор. В изотермическом случае $D = T\sigma_s$, где T – абсолютная температура, σ_s – производство энтропии. Поэтому величины $h_i = -\partial h/\partial x_i$ и q_i можно считать термодинамическими силами и потоками. Если задать $D = D(q_i)$, то из теории Циглера [4] следует закон фильтрации

$$h_i = f\frac{\partial D}{\partial q_i}, \quad f = D\left(q_\alpha \frac{\partial D}{\partial q_\alpha}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Это равенство имеет простой геометрический смысл: вектор ∇h в пространстве скоростей ортогонален поверхности уровня диссипативной функции.

В двумерном случае ($q_1 = u$, $q_2 = v$, $q_3 = 0$) аналогично [1] можно получить соответствующее (2) линейное уравнение для функции $h(u, v)$. Для этого нужно выразить дифференциалы координат dx, dy через дифференциалы напора dh и функции тока $d\psi$, перейти в этих выражениях к переменным u, v и воспользоваться условиями полного дифференциала форм dx, dy. В соответствии со сказанным имеем

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy. \tag{3}$$

Согласно (2)

$$dh = -f\left(\frac{\partial D}{\partial u}\,dx + \frac{\partial D}{\partial v}\,dy\right). \tag{4}$$

Разрешив (3), (4) относительно dx, dy, найдем

$$dx = -a\,dh - \beta\,d\psi, \quad dy = -b\,dh + \alpha\,d\psi,$$

где $\alpha = f\,\partial \ln D/\partial u$, $\beta = f\,\partial \ln D/\partial v$, $a = u/D$, $b = v/D$. Перейдя к переменным u, v, будем иметь

$$\begin{aligned} dx &= (-ah_u - \beta\psi_u)\,du + (-ah_v - \beta\psi_v)\,dv, \\ dy &= (-bh_u + \alpha\psi_u)\,du + (-bh_v + \alpha\psi_v)\,dv. \end{aligned} \tag{5}$$

Условия полного дифференциала этих форм сводятся к виду

$$\begin{aligned} -\beta_v\psi_u + \beta_u\psi_v &= -a_u h_v + a_v h_u, \\ -\alpha_v\psi_u - \alpha_u\psi_v &= -b_u h_v + b_v h_u. \end{aligned} \tag{6}$$

Разрешив систему (6) относительно ψ_u, ψ_v, исключив затем ψ перекрестным дифференцированием, получим в результате искомое уравнение для $h(u, v)$:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(S_{ij}\,\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{7}$$

Здесь

$$S_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta^{-1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_l}\,\frac{\partial a}{\partial q_m} + \frac{\partial \beta}{\partial q_l}\,\frac{\partial b}{\partial q_m}\right),$$

$q_1 = u$, $q_2 = v$, $\Delta = -\alpha_u\beta_v + \alpha_v\beta_u$; $l(i)$ и $m(j)$ определены равенствами $l(1) = m(1) = 2$, $l(2) = m(2) = 1$.

Естественно рассмотреть прежде всего случай, когда уравнение (7) является эллиптическим, матрица S_{ij} – симметричной.

Условие симметрии $S_{12} = S_{21}$ после некоторых выкладок приводится к виду $\lambda_u D_v = \lambda_v D_u$, где $\lambda = uD_u + vD_v$. С помощью (2) нетрудно проверить, что оно эквивалентно равенству

$$\frac{\partial h_1}{\partial v} = \frac{\partial h_2}{\partial u}, \tag{8}$$

которое является естественным обобщением на нелинейный случай соответствующего условия Онсагера в термодинамике необратимых процессов [5].

Условия эллиптичности уравнения (7) эквивалентны условиям положительной определенности матрицы S_{ij} и, согласно критерию Сильвестра, сводятся к неравенствам $S_{11} > 0$, $S_{11}S_{22} - S_{12}^2 > 0$. Величину S_{11} можно представить в следующей форме

$$S_{11} = \frac{\lambda}{D^2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial v}\right)\left(D_{uu}D_v^2 - 2D_{uv}D_uD_v + D_{vv}D_u^2\right)^{-1} > 0. \tag{9}$$

Отсюда видно, что достаточными условиями положительности S_{11} являются: 1) физически естественное неравенство

$$\partial h_2/\partial v > 0 \tag{10}$$

2) положительная определенность матрицы $\partial^2 D/\partial q_i\, \partial q_j$, т.е. выпуклость поверхности уровня диссипативной функции $D(u, v) = \text{const}$.

Второе неравенство критерия Сильвестра преобразуется к виду

$$\frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial v} - \left(\frac{\partial h_2}{\partial u}\right)^2 > 0.$$

Вместе с (9) оно означает положительную определенность билинейной формы

$$dh_i\, dq_i = \frac{\partial h_1}{\partial u}(du)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial v} + \frac{\partial h_2}{\partial u}\right) du\, dv + \frac{\partial h_2}{\partial v}(dv)^2 > 0. \tag{11}$$

Физически положительность скалярного произведения приращения скорости dq на соответствующее приращение движущей силы $d(-\nabla h)$ совершенно естественна.

Переход из области годографа в область течения. Рассмотрим класс фильтрационных течений со следующими свойствами:

1) течение плоское, установившееся;

2) годограф скорости – однолистная, односвязная и ограниченная область Ω;

3) граница Γ области Ω состоит из образов Γ_1^i линий постоянного напора (например, вход и выход области течения) и образов Γ_2 линий тока;

4) закон фильтрации – нелинейный и с предельным градиентом:

$$\nabla h = -\phi(q)\vec{q}/q, \quad \phi(q) = \tau + q^\alpha f(q), \quad \alpha > 0,$$

$f(q)$ – достаточно гладкая функция, отграниченная от нуля и бесконечности.

В переменных годографа (q, $\theta = \arg\vec{q}$) функции напора h и ψ связаны соотношениями [1, 2, 7]

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = -\frac{q\phi'}{\phi^2}\frac{\partial h}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{q^2}{\phi}\frac{\partial h}{\partial q}. \tag{12}$$

В силу (12) напор $h(q,\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$Lh = -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{\phi}\frac{\partial h}{\partial q}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q\phi'}{\phi^2}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{13}$$

На Γ_2 его конормальная производная равна нулю:

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{q^2}{\phi} h_q n_q + \frac{q\phi'}{\phi^2} h_\theta n_\theta = 0. \tag{14}$$

Кроме того,

$$h = h_i \quad \text{на} \quad \Gamma_1^i. \tag{15}$$

Таким образом, в области годографа Ω имеем смешанную краевую задачу (13) – (15).

Связь с областью течения (x,y) осуществляется по формулам [1, 2, 7]

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{\cos\theta}{\phi}\,dh - \frac{\sin\theta}{q}\,d\psi, \\ dy &= -\frac{\sin\theta}{\phi}\,dh + \frac{\cos\theta}{q}\,d\psi. \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть теперь мы располагаем некоторым приближенным решением $\tilde{h}(q,\theta)$ и хотим восстановить картину течения в физической области (x,y). Поскольку само уравнение (13) является следствием взаимной однозначности отображения $(q,\theta) \to (x,y)$, то линейные формы (16) являются полными дифференциалами лишь на точном решении задачи, следовательно, по $\tilde{h}(q,\theta)$ область течения в (x,y) однозначно не восстанавливается. В соответствии с (16) мерой неоднозначности может служить величина

$$\varepsilon = \sup_C \left\{ \left| \oint_C \delta x \right|, \left| \oint_C \delta y \right| \right\},$$

где C – произвольный замкнутый контур без самопересечений в области Ω,

$$\delta x = -\frac{\cos\theta}{\phi}\,d\tilde{h} - \frac{\sin\theta}{q}\,d\tilde{\psi}, \quad \delta y = -\frac{\sin\theta}{\phi}\,d\tilde{h} + \frac{\cos\theta}{q}\,d\tilde{\psi}.$$

Существует явная связь величины ε с невязкой приближенного решения. Она получается в результате преобразования контурных интегралов $\oint\limits_C \delta x$ и $\oint\limits_C \delta y$ по формуле Грина:

$$\oint\limits_C P\,d\theta + Q\,dq = \iint\limits_{\Omega(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{\partial P}{\partial q}\right) d\theta\,dq,$$

где $\Omega(C)$ – область, охватываемая контуром C. В результате некоторых преобразований приходим к соотношениям

$$\oint\limits_C \delta x = \iint\limits_{\Omega(C)} \frac{\sin\theta}{q} L\tilde{h}\,d\theta\,dq, \quad \oint\limits_C \delta y = -\iint\limits_{\Omega(C)} \frac{\cos\theta}{q} L\tilde{h}\,d\theta\,dq. \tag{17}$$

Формулы (17) могут быть полезны при оценке влияния погрешности решения задачи в области годографа на погрешность соответствующего решения в области течения. В частности, они говорят о высокой чувствительности картины течения в окрестности границы застойных зон ($q = 0$) к невязке приближенного решения в области годографа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С.А. *Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси* //Прикладная математика и механика. – 1940. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 33–52.

2. *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.* – М.: Недра, 1969. – 545 с.

3. Костерин А.В. *Об уравнениях нелинейной анизотропной фильтрации* //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – № 5. – С. 158–160.

4. Циглер Г. *Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды.* – М.: Мир, 1966. – 135 с.

5. Дьярмати И. *Неравновесная термодинамика.* – М.: Мир, 1974. – 304 с.

6. Костерин А.В., Глазов А.В. *О структурном методе решения краевых задач нелинейной фильтрации* //Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 1. – С. 41–43.

7. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах.* – М.: Недра, 1984. – 208 с.